

# I. Síkgeometria I

## Bevezetés a síkgeometriába

### Szakaszok; sokszögek átlói

**1.** A szakasz kétszereséből az eredeti szakaszt a szakaszfelező merőleges és a kétszeres szakasz metszéspontjának megjelölésével kaphatjuk. A felezéspont és a kétszeres szakasz bármelyik végpontja meghatározza a szerkesztendő szakaszt.

**2.** A  $3m - 2n$  szakasz csak akkor szerkeszthető, ha  $3m - 2n \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{2}{3}n$ . Egyenlőség esetén a keresett szakasz 0 hosszúságú.

**3.** Legyen a két szakasz összege  $a + b$ , különbsége  $a - b$  és  $a + b > a - b$ ! Az összeg- és különbségszakasz összege a nagyobb szakasz kétszeresét adja ( $a + b + a - b = 2a$ ), így ennek felezésével a nagyobb szakaszhoz jutunk. Az összeg- és különbségszakasz különbsége a kisebb szakasz kétszeresét adja ( $a + b - (a - b) = 2b$ ), így ennek felezésével a kisebb szakaszhoz jutunk.

**4.** Legyen a két adott szakasz  $2a + b$  és  $2a - b$ !  $2a + b + 2a - b = 4a \Rightarrow A$   $4a$  szakasz felének felezésével az egyik szakaszhoz jutunk.  $2a + b - (2a - b) = 2b \Rightarrow A$   $2b$  szakasz felezésével a másik szakaszhoz jutunk.

**5.**  $CD = CB + BD \Rightarrow BD = CD - CB = 8$  cm;  $AD = AB + BD = 10$  cm +  $8$  cm = 18 cm.

**6.** a)  $AC + BD < AB$  miatt a pontok  $A; C; D; B$  sorrendben helyezkednek el.  
 $CD = AB - AC - BD = 14$  m;

b)  $AC + BD > AB$  miatt a pontok  $A; D; C; B$  sorrendben helyezkednek el.  
 $DC = AC + BD - AB = 4,7$  m.

**7.**  $AB = 5$  cm  $\Rightarrow F_1B = \frac{5}{2}$  cm;  $BC = 17$  cm  $\Rightarrow BF_2 = \frac{17}{2}$  cm;  $F_1F_2 = F_1B + BF_2 = 11$  cm.

**8.** Legyen az  $AB$  szakasz felezőpontja  $F_1$ , az  $AC$  szakasz felezőpontja pedig  $F_2$ .

a) **1. eset:**  $B$  elválasztja  $A$ -t és  $C$ -t.  $AF_1 = 50$  m;  $AF_2 = 80$  m;

$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \Rightarrow F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = 30$  m.

**2. eset:**  $A$  elválasztja  $B$ -t és  $C$ -t.  $AF_1 = 50$  m;  $F_2A = 80$  m;

$F_1F_2 = F_1A + AF_2 = 130$  m.

b) **1. eset:**  $C$  elválasztja  $A$ -t és  $B$ -t.  $AF_1 = \frac{a}{2}$ ;  $AF_2 = \frac{b}{2}$ ;

$AF_2 + F_2F_1 = AF_1 \Rightarrow F_2F_1 = AF_1 - AF_2 = \frac{a-b}{2}$ .  $C$  és  $F_1$  sorrendje nem befolyásolja a megoldást.

**2. eset:**  $A$  elválasztja  $B$ -t és  $C$ -t.  $AF_1 = \frac{a}{2}$ ;  $F_2A = \frac{b}{2}$ ;  $F_2A + AF_1 = F_2F_1 = \frac{a+b}{2}$ .

**9.**  $AC = AB + BC = a + b$ ;  $AF = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{a+b}{2}$ .

**10.**  $AP:PB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 90 \text{ m} \Rightarrow x = 18 \text{ m}$ ;  $\underline{AP = 36 \text{ m}}$ ;  $\underline{PB = 54 \text{ m}}$ .

**11.**  $AP:PB = b:c \Rightarrow b \cdot x + c \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}$ ;  $\underline{AP = b \cdot \frac{a}{b+c}}$ ;  $\underline{PB = c \cdot \frac{a}{b+c}}$ .

**12.** Jelöljük a felezőpontot  $F$ -fel, a  $2:3$  arányú osztópontot  $G$ -vel!  $AF = FB = \frac{35}{2} \text{ m}$ ;

$AG:GB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 35 \text{ m} \Rightarrow x = 7 \text{ m} \Rightarrow AG = 14 \text{ m}$ ;

$AG + GF = AF \Rightarrow GF = AF - AG = 3 \frac{1}{2} \text{ m}$ .

**13.** Jelöljük a felezőpontot  $F$ -fel, a  $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$  arányú osztópontot  $G$ -vel!

$AF = FB = \frac{5,6}{2} \text{ m} = 2,8 \text{ m}$ ;  $AG:GB = \frac{2}{3}:\frac{4}{15} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{4}{15}x = 5,6 \text{ m} \Rightarrow x = 6 \text{ m} \Rightarrow$

$\Rightarrow AG = 4 \text{ m}$ ;  $AG = AF + FG \Rightarrow FG = AG - AF = 1,2 \text{ m}$ .

**14.**  $AC:CB = 2:5 \Rightarrow 2x + 5x = 42 \text{ cm} \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$ ;  $AD:DB = 3:4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3x + 4x = 42 \text{ cm} \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \Rightarrow AD = 18 \text{ cm}$ ;  $AD = AC + CD \Rightarrow CD = AD - AC = \underline{6 \text{ cm}}$ .

**15.**  $AC = AB + BC$ ;  $DB = DC + CB = -CD - BC$ ;  $AD = AB + BC + CD$ ;

$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC =$

$= AB \cdot CD + (AB + BC) \cdot \{-CD - BC\} + (AB + BC + CD) \cdot BC =$

$= AB \cdot CD - AB \cdot CD - BC \cdot CD - AB \cdot BC - BC^2 + AB \cdot BC + BC^2 + CD \cdot BC = 0$ .

A feladat általánosítható. A pontok más sorrendben való elhelyezkedésekor is fennáll az előjeles szakaszok között felírt összes egyenlőség. Például  $A, D, C, B$  sorrend esetén:

$AC = AB - CB = AB + BC$ ;  $DB = DC + CB = -CD - BC$ ;  $AD = AB - CB - DC =$

$= AB + BC + CD$ .

**16.**  $AC = AB + BC$ ;  $BD = BC + CD$ ;  $AD = AB + BC + CD$ .

(1)  $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = (AB + BC)^2 \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= (AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2) \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB$ .

(2)  $BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD = BC^2 \cdot (AB + BC + CD) + AB \cdot (BC + CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + (AB \cdot BC + AB \cdot CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot CD^2 =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB$ .

(1) és (2) összefüggések jobb oldala egyenlő, tehát az állítás igaz.

**17.** a) 4 pont esetén  $\frac{4 \cdot 3}{2} = \underline{6}$  lehetséges egyenes van. b) 5 pont esetén  $\frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{10}$  lehetséges

egyenes van. c) 212 pont esetén  $\frac{212 \cdot 211}{2} = \underline{22366}$  lehetséges egyenes van. d)  $n$  pont esetén

$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  lehetséges egyenes van. Bármely két pont egyetlen egyenest határoz meg, mivel

semelyik három nincs egy egyenesen. Annyi egyenes van, ahányféleképpen  $n$  pontból 2-t ki lehet választani.

**18.** A kiválasztott csúcsból önmagába és a két szomszédjába nem indul átló. Az egy csúcsból induló átlók száma: a)  $5 - 3 = \underline{2}$ ; b)  $16 - 3 = \underline{13}$ ; c)  $\underline{n - 3}$ .

**19.** a) Az egyik csúcsból kiinduló 2 átló 3 db háromszöget hoz létre.

b) Az egy csúcsból kiinduló átlók száma  $12 - 3 = 9$ . Az 1. átló 1 db háromszöget és egy tizenegyszöget hoz létre a tizenkétszögből. A 2. átló újabb háromszöget és egy tízszöget, a 3. átló a 3. háromszöget és egy kilencszöget, ... a 9. átló a 9. háromszöget és még egy háromszöget, azaz összesen 10 db-ot hoz létre.

c)  $(n - 2)$  db háromszög keletkezik.

**20.** Az  $n$  oldalú konvex sokszög egy csúcsából  $(n - 3)$  db átló húzható.  $n - 3 = 12 \Rightarrow \underline{n = 15}$ .

**21.** Az  $n$  oldalú konvex sokszöget az egy csúcsból induló átlók  $(n - 2)$  db háromszögre bontják.  $n - 2 = 18 \Rightarrow \underline{n = 20}$ .

**22.**  $n + (n - 3) = 17 \Rightarrow \underline{n = 10}$ .

**23.** Az  $n$  oldalú sokszög egy csúcsából  $(n - 3)$  db átló indul.  $n$  csúcsból  $n \cdot (n - 3)$  db átló indul, de így minden átlót kétszer számoltunk, tehát az összes átlók száma:  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ . A feltétel

szerint:  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 27$ . Ebből a pozitív megoldás  $\underline{n = 9}$ .

**24.** a) Egy kiszemelt gyerek minden társával helyet cserélhet, tehát 6 cserepartnere lehet.

b) 1 játékos 6 helyre cserélhet. 7 játékos  $7 \cdot 6 = 42$  helyre, de minden cserében ketten szerepelnek, így a valóságos cserék száma:  $\frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{21}$ .

**25.** Az  $n$  oldalú konvex sokszög átlóinak száma  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ .

A feltétel szerint:  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 6n$ . Ebből a pozitív megoldás  $\underline{n = 15}$ .

**26.** Az  $n$  oldalú konvex sokszög átlóinak száma  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ .

A feltétel szerint:  $\frac{n \cdot (n - 3)}{2} = n$ . Ebből a pozitív megoldás  $\underline{n = 5}$ .

## Szögek, szögpárok

**27.**  $45^\circ = 90^\circ : 2$ , tehát  $\sphericalangle$ -et kell felezni.

A szabályos háromszög mindhárom szöge  $60^\circ$ , tehát szabályos háromszöget kell szerkeszteni.

$30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ$ , tehát  $60^\circ$ -os szöget kell felezni.  $22,5^\circ = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ$ , tehát  $45^\circ$ -os szöget kell felezni.

$15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot 60^\circ$ , tehát a  $60^\circ$ -os szög felét kell felezni.

**28.** A  $90^\circ$ -os és a  $60^\circ$ -os szögekből szögfelezéssel és összeadással többféleképpen is szerkeszthetők a kérdéses szögek, például:  $105^\circ = 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 90^\circ$ ;  $52,5^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ + \frac{1}{4} \cdot 90^\circ$ ;

$$75^\circ = \frac{1}{2} \cdot (60^\circ + 90^\circ); \quad 67,5^\circ = \frac{3}{4} \cdot 90^\circ; \quad 135^\circ = \frac{3}{2} \cdot 90^\circ.$$

**29.** Szerkesztési feladat, megoldását az olvasóra bizzuk.

**30.** Legyen  $\alpha + \beta = \delta$  az egyik,  $\alpha - \beta = \varepsilon$  a másik megadott szög! Az értelmezés miatt  $\alpha > \beta$  és  $\delta > \varepsilon$ . A két egyenlet összegéből  $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{2} \Rightarrow$  a nagyobb szög megkapható a megadott

szögek összegének felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből  $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$  a kisebb szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

**31.** Legyen  $2\alpha + \beta = \delta$  az egyik,  $2\alpha - \beta = \varepsilon$  a másik megadott szög! Az értelmezés miatt  $\alpha > \frac{\beta}{2}$  és  $\delta > \varepsilon$ . A két egyenlet összegéből  $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{4} \Rightarrow$  az egyik szög megkapható a megadott szögek összegének kétszeri felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből

$$\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow \text{a másik szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.}$$

**32.**  $\alpha : \beta = 7 : 3 \Rightarrow \alpha = 7\varepsilon$  és  $\beta = 3\varepsilon$ . A feltétel szerint:  $7\varepsilon = 3\varepsilon + 72^\circ \Rightarrow \varepsilon = 18^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \underline{180^\circ}$ .

**33.**  $\alpha : \beta = 5 : 2 \Rightarrow \alpha = 5\varepsilon$  és  $\beta = 2\varepsilon$ . A feltétel szerint:  $5\varepsilon = 2\varepsilon + 54^\circ \Rightarrow \varepsilon = 18^\circ \Rightarrow \alpha = \underline{90^\circ}$  és  $\beta = \underline{36^\circ}$ .

**34.**  $\alpha + \beta = 216^\circ$  és  $\alpha + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \Rightarrow \underline{\beta = 72^\circ}$  és  $\underline{\alpha = 144^\circ}$ .

**35.**  $\alpha + \alpha + 10^\circ + \alpha + 20^\circ + \alpha + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ . A szögek nagysága:  $\underline{30^\circ}$ ;  $\underline{40^\circ}$ ;  $\underline{50^\circ}$ ;  $\underline{60^\circ}$ .

**36.** Jelöljük az első és a második sugár szögét  $\alpha$ -val!  $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$ . A keresett szögek:  $\underline{24^\circ}$ ;  $\underline{48^\circ}$ ;  $\underline{96^\circ}$ ;  $\underline{192^\circ}$ .

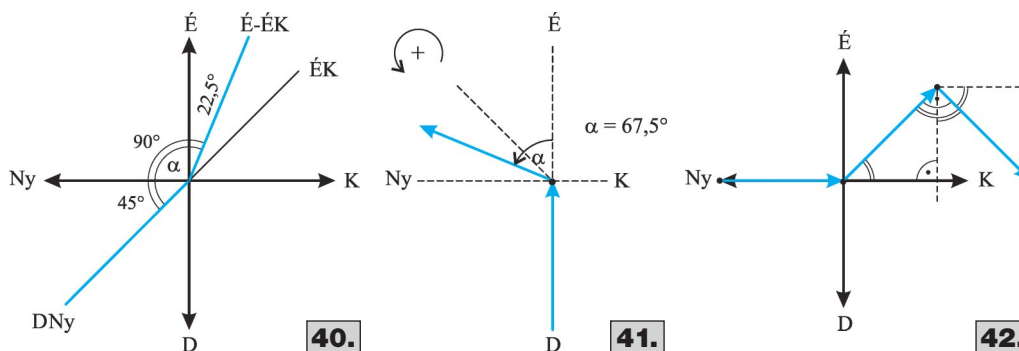
**37.** 0 órától 12 óráig rendre a mutatók által bezárt szög:  $0^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $150^\circ$  ( $210^\circ$ );  $120^\circ$  ( $240^\circ$ );  $90^\circ$  ( $270^\circ$ );  $60^\circ$  ( $300^\circ$ );  $30^\circ$  ( $330^\circ$ ) és  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ).

**38.** 1 óra alatt a kismutató  $30^\circ$ -ot fordul el. a) negyed hét;  $\frac{1}{4}$  óra alatt a  $30^\circ$  negyedét tette meg, így a 6-ostól számítva  $7,5^\circ$ -ot fordult a kismutató. A nagymutató pillanatnyi állásával  $90^\circ + 7,5^\circ = \underline{97,5^\circ}$ -os szöget zár be.

b) fél tíz;  $\frac{1}{2}$  óra alatt a kismutató a  $30^\circ$  felét tette meg, így  $15^\circ$ -ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával  $90^\circ + 15^\circ = \underline{105^\circ}$ -os szöget zár be.

c) háromnegyed öt;  $\frac{3}{4}$  óra alatt a kismutató a  $30^\circ$  háromnegyedét tette meg, így  $22,5^\circ$ -ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával  $90^\circ + 30^\circ + (30^\circ - 22,5^\circ) = \underline{127,5^\circ}$ -os szöget zár be.

**39.** 1 óra alatt a kismutató  $30^\circ$ -ot fordul el. a) 2 óra 20 perc; a kismutató a 2-höz képest  $\frac{1}{3} \cdot 30^\circ = 10^\circ$ -ot, a nagymutató pedig  $60^\circ$ -ot haladt. A bezárt szög  $60^\circ - 10^\circ = \underline{50^\circ}$ .



b) 3 óra 32 perc; a kismutató a 3-hoz képest  $\frac{32}{60} \cdot 30^\circ = 16^\circ$ -ot, a nagymutató pedig  $90^\circ + 12^\circ = 102^\circ$ -ot haladt. A bezárt szög  $102^\circ - 16^\circ = 86^\circ$ .

**40.** Az ábra jelöléseit használva  $\alpha = 45^\circ + 90^\circ + 22,5^\circ = 157,5^\circ$ .

**41.**  $\alpha = 67,5^\circ = 45^\circ + 22,5^\circ \Rightarrow$  a hajó nyugat-északnyugati irányban halad.

**42.** A repülőgép délkelet felé halad.

**43.** a)  $21^\circ 36' = 21,6^\circ$ ; b)  $49^\circ 9' = 49,15^\circ$ ; c)  $51^\circ 24' 18'' = 51,405^\circ$ ; d)  $17^\circ 27' 45'' = 17,4625^\circ$ .

**44.** a)  $108,5^\circ = 108^\circ 30'$ ; b)  $20,7^\circ = 20^\circ 42'$ ; c)  $18,3^\circ = 18^\circ 18'$ ; d)  $59,7^\circ = 59^\circ 42'$ ;

e)  $100,01^\circ = 100^\circ 36''$ .

**45.**  $\delta = \alpha = 32^\circ 42'$ , mert csúcsszögek;  $\epsilon = \alpha = 32^\circ 42'$ , mert egyállású szögek;  $\sigma = \alpha = 32^\circ 42'$ , mert váltószögek;  $\beta = \gamma = 180^\circ - 32^\circ 42' = 147^\circ 18'$ , mert  $\alpha$  mellékszögei;  $\eta = \omega = 180^\circ - 32^\circ 42' = 147^\circ 18'$ , mert  $\alpha$  társszögei.

**46.**  $\alpha = 90^\circ - \alpha + 16^\circ 28' \Rightarrow \alpha = 53^\circ 14'$ .

**47.**  $\alpha = \frac{1}{5} \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ .

**48.**  $\alpha = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ .

**49.**  $\alpha = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ . Akkor egyenlő a szög a társszögével, ha  $90^\circ$ -os.

**50.** a)  $\alpha = \frac{2}{3} \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 72^\circ$ ; b)  $\alpha = \frac{3}{7} \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 54^\circ$ ;

c)  $\alpha = \frac{3}{5} \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 67,5^\circ$ .

**51.** a)  $\alpha + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 1 \frac{3}{16} \cdot 180^\circ \Rightarrow \alpha = 146,25^\circ$ ;

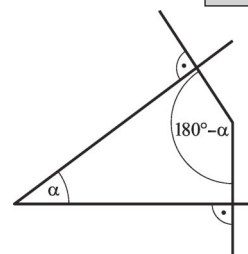
b)  $\alpha + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 1 \frac{5}{9} \cdot 180^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$ .

**52.** A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei.

a)  $\alpha = 3 \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 135^\circ$ ;  $180^\circ - \alpha = 45^\circ$ ;

b)  $\alpha = 4 \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 144^\circ$ ;  $180^\circ - \alpha = 36^\circ$ ;

c)  $\alpha = 3 \cdot (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 150^\circ$ ;  $180^\circ - \alpha = 30^\circ$ .



**53.** A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei. a)  $\beta = 11\alpha \Rightarrow \alpha + 11\alpha = 180^\circ \Rightarrow \underline{\alpha = 15^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 165^\circ}$ ; b)  $\beta = \frac{1}{3}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{1}{3}\alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\alpha = 135^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 45^\circ}$ ; c)  $\beta = \frac{7}{2}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{7}{2}\alpha = 180^\circ \Rightarrow \underline{\alpha = 40^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 140^\circ}$ .

**54.**  $TCA\Delta$ -ben  $CTA\angle = 90^\circ \Rightarrow TCA\angle = 90^\circ - \alpha$ . Az  $ABC\Delta$ -ben  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , így az előző állítással összevetve  $TCA\angle = \beta$  adódik. A másik állítás hasonlóan belátható.

**55.** A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különbözhet egymástól, ha társszögek.  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ;  $\alpha = \beta + 90^\circ$ ;  $\beta + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \underline{\beta = 45^\circ}$ ;  $\underline{\alpha = 135^\circ}$ .

**56.** A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különbözhet, ha társszögek.

a)  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ + \alpha$ ;  $\Rightarrow \underline{\alpha = 45^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 135^\circ}$ .

b)  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ;  $\beta = 120^\circ + \alpha$ ;  $\Rightarrow \underline{\alpha = 30^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 150^\circ}$ .

c)  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ;  $\beta = 75^\circ + \alpha$ ;  $\Rightarrow \underline{\alpha = 52,5^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 127,5^\circ}$ .

**57.**  $\delta = 1\frac{3}{5} \cdot 90^\circ = 144^\circ$ ;  $ADB\angle = 180^\circ - \delta = 36^\circ$ , mert  $\delta$ -val társszögek.

$ADB\Delta$ -ben  $DAB\angle = 180^\circ - 36^\circ - \frac{144^\circ}{2} = \underline{72^\circ}$ .

**58.**  $2 \cdot \frac{\beta}{2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \Rightarrow \angle(f_1; f_2) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \underline{90^\circ}$ .

**59.**  $\angle(a; b) = 2\alpha$ ; felezője  $f_1$  és  $\angle(b; c) = 2\beta$ ; felezője  $f_2$ .  $f_1 \perp f_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle(a; c) = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow a$  és  $c$  egy egyenest alkot.

**60.** A keletkezett szögek vagy csúcshögek vagy mellékszögek vagy egyállású szögek vagy társszögek. A csúcshögeknek közös a szögfelezőjük, a mellékszögeknek az **58.** feladat állítása szerint merőleges, az egyállású szögeknek párhuzamos, a társszögeknek pedig merőleges. Az állítás is párhuzamosságot vagy merőlegességet fogalmazott meg.

**61.**  $f_\alpha \perp f_\beta$  miatt az **59.** feladat állítását felhasználva:  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

A feltétel szerint:  $\beta = \alpha + 130^\circ \Rightarrow \alpha + \alpha + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \underline{\alpha = 25^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 155^\circ}$ .

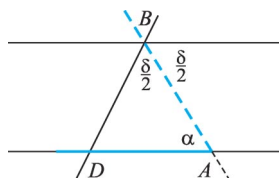
**62.** Az ábra jelöléseit használva:  $\delta_1 = 127^\circ 17'$ ;

$B_1AC_1M$  négyszögben  $360^\circ = \alpha + 90^\circ + 90^\circ + 127^\circ 17' \Rightarrow \underline{\alpha = 52^\circ 43'}$ .

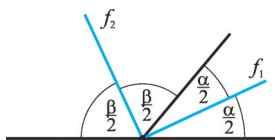
**63. 1. eset:** A tompaszög az  $A$  csúcánál van. A 63/I. ábra jelöléseivel:  $\delta_2 = 47^\circ 6' 42''$ .

$B_1AC_1M$  négyszögben  $360^\circ = \alpha + 90^\circ + 90^\circ + 47^\circ 6' 42'' \Rightarrow \underline{\alpha = 132^\circ 53' 18''}$ .

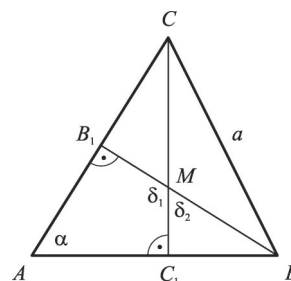
57.



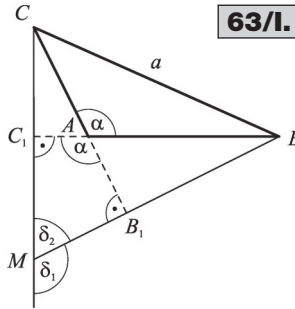
58.



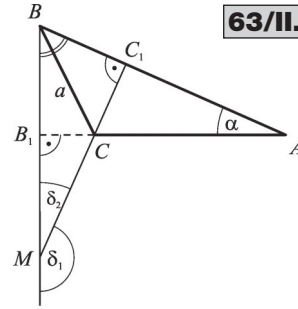
62.



**2. eset:** A tompaszög a  $C$  csúcsnál van.  $BC_1M$  derékszögű háromszögben  $MBC_1\hat{=} = 90^\circ - \delta_2$ ;  
 $AB_1B$  derékszögű háromszögben  $B_1BA\hat{=} (= MBC_1\hat{=} ) = 90^\circ - \alpha$ .  
 A két egyenlőséget összevetve:  
 $\alpha = \delta_2 = 47^\circ 6' 42''$ .



63/I.



63/II.

Sokszögek szögösszege

**64.**  $n$  darab háromszög keletkezett, szögeik összege  $n \cdot 180^\circ$ . E szögek közül azok, amelyeknek csúcsa az adott pont, nem tartoznak a sokszög belső szögeihez, és együtt  $360^\circ$ -ot alkotnak. Ezért az állítás igaz.

**65.** Az  $n$  oldalú konvex sokszög egy csúcsból induló átlói  $(n - 2)$  db háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögek szögei részben vagy egészen a sokszög szögeit alkotják, és a sokszög minden szöge ezen háromszögek szögeiből adódik. A sokszög belső szögeinek összege:

$(n - 2) \cdot 180^\circ$ . a) négyszög esetében  $(4 - 2) \cdot 180^\circ = \underline{360^\circ}$ ; b) nyolcszög esetében  $(8 - 2) \cdot 180^\circ = \underline{1080^\circ}$ ; c) tizenháromszög esetében  $(13 - 2) \cdot 180^\circ = \underline{1980^\circ}$ ; d) kilencvenhatszög esetében  $(96 - 2) \cdot 180^\circ = \underline{16920^\circ}$ ;

**66.** A konkáv csúcsból induló átló a konkáv négyszöget 2 db háromszögre bontja. A négyszög belső szögeinek összege egyenlő a két háromszög belső szögeinek összegével, azaz  $360^\circ$ -kal.

**67.**  $(n - 2) \cdot 180^\circ = 1620^\circ \Rightarrow \underline{n = 11}$ . Tizenegy oldalú a sokszög.

**68.** a) egyenlő szögű ötszög:  $\alpha_5 = \frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} = \underline{108^\circ}$ ;

b) egyenlő szögű hatszög:  $\alpha_6 = \frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6} = \underline{120^\circ}$ ;

c) egyenlő szögű hétszög:  $\alpha_7 = \frac{(7 - 2) \cdot 180^\circ}{7} = \underline{128,57^\circ}$ ;

d) egyenlő szögű tízszög:  $\alpha_{10} = \frac{(10 - 2) \cdot 180^\circ}{10} = \underline{144^\circ}$ ;

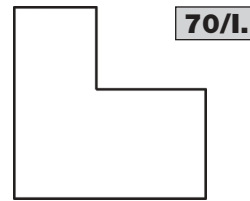
e) egyenlő szögű  $n$ -szög:  $\alpha_n = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$ .

**69.** A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a négyszög  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  szögei  $90^\circ$ -nál kisebbek!  $\Rightarrow$

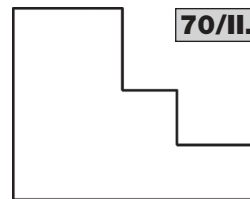
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ , ami ellentmond annak, hogy a négyszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ .

**70.** Például: a) 70/I. ábra; b) 70/II. ábra.

**71.** Ha bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor a sokszögnek csak  $90^\circ$ -os és  $270^\circ$ -os szögei lehetnek. Tegyük fel, hogy az  $(n + k)$  oldalú sokszögnek  $n$  db  $90^\circ$ -os és  $k$  db  $270^\circ$ -os szöge van! A belső



70/I.



70/II.

szögek összegére fennáll:  $n \cdot 90^\circ + k \cdot 270^\circ = (n+k-2) \cdot 180^\circ \Rightarrow k = n-4 \Rightarrow k$  és  $n$  azonos paritásúak, tehát az összegük (a sokszög oldalszáma) páros.

**72.**  $n$  oldalú sokszög belső szögeinek összege:  $(n-2) \cdot 180^\circ$ ;  $(n+4)$  oldalú sokszög belső szögeinek összege:  $(n+2) \cdot 180^\circ$ . A változás  $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$  növekedés.

**73.** Az  $n$  oldalú sokszög belső szögeinek összege:  $(n-2) \cdot 180^\circ = s$ ;  $2n$  oldalú sokszög belső szögeinek összege:  $(2n-2) \cdot 180^\circ = (2n-4) \cdot 180^\circ + 360^\circ = 2 \cdot (n-2) \cdot 180^\circ + 360^\circ = 2s + 360^\circ$ . A szögösszeg  $(s+360^\circ)$ -kal nőtt.

**74. a)** Tekintsük a háromszög belső és külső szögeinek összegét!  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ ;  $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540^\circ$ ;  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$ .

b) Az a) pontban látott gondolatmenetet követjük. Az ötszög belső és külső szögeinek összege:  $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$ . A belső szögek összege:  $540^\circ$ . A külső szögek összege:  $900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$ .

c) Az a) pontban látott gondolatmenetet követjük. Az  $n$  oldalú konvex sokszög belső és külső szögeinek összege:  $n \cdot 180^\circ$ ; a belső szögek összege:  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . A külső szögek összege:  $n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ .

**75.**  $(n-2) \cdot 180^\circ + \alpha' = 1846^\circ$ ;  $0 < \alpha' < 180^\circ$ ;  $(n-2) \cdot 180^\circ - 1800^\circ + \alpha' = 46^\circ$ ;  $(n-12) \cdot 180^\circ = 46^\circ - \alpha'$ . Az egyenlet bal oldala osztható 180-nal. A jobb oldal csak akkor lehet osztható, ha  $\alpha' = 46^\circ \Rightarrow n = 12$ . A sokszög 12 oldalú, a külső szög  $46^\circ$ .

**76.** A feladat feltételei szerint az ötszög belső szögeinek összege:  $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 540^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$ . A keresett szögek:  $36^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $108^\circ$ ;  $144^\circ$ ;  $180^\circ$ . Mivel belső szög nem lehet  $180^\circ$ , így ilyen ötszög nem létezik.

**77.** Tekintsük a négyszög egyik oldalegyenesén lévő belső és külső szögek összegét!  $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ ;  $\beta + \beta' = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360^\circ$ . A négyszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ :  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \Rightarrow \alpha' + \beta' = \gamma + \delta$ .

**78.** A belső szögek összege  $(n-2) \cdot 180^\circ$ , a külső szögeké  $360^\circ$ .  $(n-2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 360^\circ \Rightarrow n = 8$  oldalú a sokszög.

**79. a)** Legyen  $\alpha$  és  $\gamma$  szögfelezőjének metszéspontja  $M$ !

$$AMCB \text{ négyszögben } \angle AMC = 360^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta - \frac{\gamma}{2} = 360^\circ - 36^\circ - 122^\circ - 34^\circ = 168^\circ.$$

A két szögfelező hajlásszöge:  $180^\circ - \angle AMC = 12^\circ$ .

b) Legyen  $\alpha$  és  $\beta$  szögfelezőjének metszéspontja  $P$ !  $ABP\Delta$ -ben  $\delta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} =$

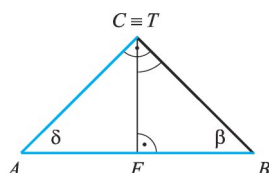
$$= 180^\circ - 36^\circ - 61^\circ = 83^\circ. \text{ A két szögfelező hajlásszöge: } \delta = 83^\circ.$$

**80.** Tekintsük át az egyes háromszögtípusok belső és külső szögeinek számát az alábbi táblázat segítségével!

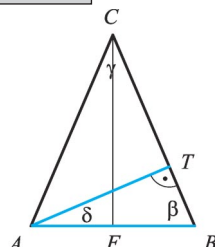
	Belső szögek			Külső szögek		
	hegyesszög	tompaszög	derékszög	hegyesszög	tompaszög	derékszög
Hegyeszögű háromszög	3 db				3 db	
Derékszögű háromszög	2 db		1 db		2 db	1 db
Tompaszögű háromszög	2 db	1 db		1 db	2 db	

A külső szögek között legfeljebb egy volt hegyesszög és legalább kettő a tompaszög.

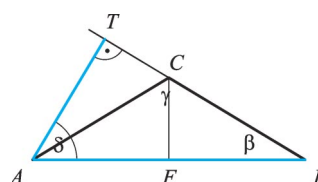
84/I.



84/II.



84/III.



**81.** Jelöljük a keresett sokszög oldalainak számát  $n$ -nel! Tegyük fel, hogy a sokszög minden külső szöge legalább  $90^\circ$ ! A külső szögek összege  $360^\circ$ , így fennáll a  $360^\circ \geq n \cdot 90^\circ \Rightarrow n \leq 4$  egyenlőtlenség. Tehát  $n \geq 5$  esetén biztosan van a külső szögek között hegyesszög.

**82.** Jelöljük a háromszög alapját  $BC$ -vel, az  $A$ -nál lévő külső szögfelezőt pedig  $e$ -vel!

$$\sphericalangle(e; AC) = \frac{180^\circ - \alpha}{2}; \quad BCA \sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle(e; AC) = BCA \sphericalangle.$$

A két egyenlő szög egyik szára ugyanannak az egyenesnek két ellentétes irányú félegyenese, másik száruk a fenti egyenes által határolt más-más félsíkban van.  $\Rightarrow$  A két szög váltószög  $\Rightarrow e \parallel a$ .

**83.** Jelöljük az  $A$  csúcsnál lévő külső szög felezőjét  $e$ -vel!  $a \parallel e \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha'}{2}$ , mert váltószögek,

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \frac{\alpha'}{2} = 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \underline{c = b}.$$

**84.**  $ATB\Delta$ -ben:  $\delta = 90^\circ - \beta$ ;  $F$  az  $AB$  alap felezéspontja  $\Rightarrow CF$  szimmetriatengely felezi a szárszöget és merőleges az alapra.  $CFB\Delta$ -ben:  $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \beta$ . Az állításokból  $\delta = \frac{\gamma}{2}$  adódik.

**85.** Legyen  $\alpha$  és  $\beta$  szögfelezőjének metszéspontja  $P$ , az  $ABP\Delta$   $P$ -nél lévő külső szöge  $\delta$ !

$$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} < 90^\circ, \text{ tehát } \delta \text{ a szögfelezők hajlásszöge.}$$

$$a) \delta = 90^\circ - 16,3^\circ = \underline{73,7^\circ}; \quad b) \delta = 90^\circ - 45^\circ = \underline{45^\circ}; \quad c) \delta = 90^\circ - 75^\circ 7' = \underline{14^\circ 53'}.$$

**86.** A külső szögre vonatkozó tételből:  $\alpha' = \beta + \gamma$ ; a feladat feltétele szerint:  $\alpha' = 2\beta$ . A két állítást összevetve:  $\beta = \gamma \Rightarrow$  a háromszög egyenlő szárú.

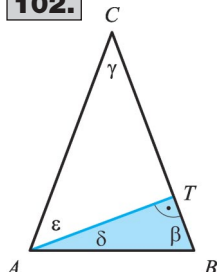
**87.** a) A szárszög  $60^\circ \Rightarrow$  az alapon fekvő szögek  $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ -osak  $\Rightarrow$  a háromszög szabályos. b) Az alapon fekvő szögek  $60^\circ$ -osak  $\Rightarrow$  a szárszög  $180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow$  a háromszög szabályos.

### Háromszögek belső és külső szögei

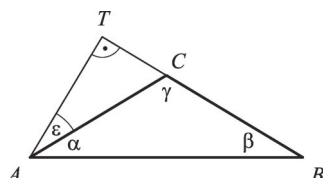
**88.** A feladat feltételei szerint:  $\alpha = 5x$ ;  $\beta = 7x$ ;  $\gamma = 5x + \frac{1}{18} \cdot 180^\circ = 5x + 10^\circ$ . A háromszög belső szögeinek összege:  $5x + 7x + 5x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ \Rightarrow \underline{\alpha = 50^\circ}$ ;  $\underline{\beta = 70^\circ}$ ;  $\underline{\gamma = 60^\circ}$ .

- 89.** A feladat feltételei szerint:  $\alpha = 70^\circ$ ;  $\beta = 5x$ ;  $\gamma = 6x$ . A háromszög belső szögeinek összege:  $70^\circ + 5x + 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 50^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\gamma = 60^\circ}}$ .
- 90.** a) A feladat feltételei szerint:  $\alpha = x$ ;  $\beta = 2x$ ;  $\gamma = 3x$ . A háromszög belső szögeinek összege:  $x + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\beta = 60^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\gamma = 90^\circ}}$ .  
 b) A megoldásmenet a)-hoz hasonló:  $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\beta = 60^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\gamma = 75^\circ}}$ .  
 c) A megoldásmenet a)-hoz hasonló:  $\underline{\underline{\alpha = 30^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\beta = 70^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\gamma = 80^\circ}}$ .
- 91.** A feladat feltételei szerint:  $\alpha = 42^\circ 24'$ ;  $\beta = \gamma + 27,1^\circ = \gamma + 27^\circ 6'$ . A háromszög belső szögeinek összege:  $42^\circ 24' + \gamma + 27^\circ 6' + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 55^\circ 15'}}$   $\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 82^\circ 21'}}$ .
- 92.** A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a  $P$  pontból az  $e$  egyenesre két merőleges egyenes húzható! Legyen ezeknek  $e$ -vel való metszéspontja  $T_1$  és  $T_2$ !  $T_1 \neq T_2 \Rightarrow A$  két merőleges egymással bezárt szöge:  $\gamma > 0$ . A  $T_1T_2P\Delta$  belső szögeinek összege  $90^\circ + 90^\circ + \gamma > 180^\circ$ , ami lehetetlen.  $\Rightarrow$  Nem létezik a két merőleges.
- 93.** Legyen  $\alpha' = 87^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 93^\circ}}$ . Jelöljük a  $27^\circ$ -os szöget  $\beta$ -val!  
 A harmadik szög  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{60^\circ}}$ .
- 94.** A feladat feltételei szerint  $\alpha = 2\gamma'$ ;  $\beta = 3\gamma'$ ;  $\gamma = 180^\circ - \gamma'$ . A háromszög belső szögeinek összege:  $2\gamma' + 3\gamma' + 180^\circ - \gamma' = 180^\circ \Rightarrow \gamma' = 0^\circ$ . Ilyen háromszög nem létezik.
- 95.** A feladat feltételei szerint  $\alpha' = 128^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52^\circ}}$ ; és  $\beta' = 116^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 64^\circ}}$ . A belső szögek összegéből:  $\gamma = 180^\circ - 52^\circ - 64^\circ = 64^\circ$ .
- 96.** Az adott szög a szárszög külső szöge, mivel alapon fekvő szög csak hegyesszög lehet, és ahhoz tompaszög a külső szög.  $\gamma' = 87^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 93^\circ}}$  a háromszög szárszöge. Az alapon fekvő szögek:  $\alpha = \beta = \frac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{43,5^\circ}}$ .
- 97.** a) **1. eset:** Az adott szög a szárszög külső szöge:  $\gamma' = 96^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 84^\circ}} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{48^\circ}}$ .  
**2. eset:** Az adott szög az alapon fekvő egyik szög külső szöge:  $\alpha' = 96^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 84^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 84^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 84^\circ = 12^\circ}}$ .  
 b)  $64^\circ$ -os szög csak szárszög külső szöge lehet, mivel hozzá tompaszög tartozik belső szögeként.  
 $\gamma' = 64^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 116^\circ}} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{32^\circ}}$ .
- 98.** Legyen  $\alpha$  és  $\beta$  szögfelezőjének metszéspontja  $P$ ; az  $ABP\Delta$   $P$ -nél lévő külső szöge  $\delta \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \underline{\underline{90^\circ - \frac{\gamma}{2}}}$ .
- 99.** Jelölje  $A_1$  az  $A$ -ból induló,  $B_1$  a  $B$ -ből induló magasság talppontját,  $M$  a két magasságvonal metszéspontját,  $\delta \leq 90^\circ$  a két magasságvonal hajlásszögét!  $\delta$  az  $MBA_1$  derékszögű háromszögben hegyesszög.  $\gamma$  és  $\delta$  merőleges szárú szögek. a), b) és d) esetben egyenlők, mert egyaránt hegyesszögek, c) esetben  $\gamma$  tompaszög, ezért  $\gamma$  és  $\delta$  kiegészítő szögek.  
 a)  $\alpha = 22,5^\circ$ ;  $\beta = 75^\circ \Rightarrow \gamma = 82,5^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 82,5^\circ}}$  a hajlásszög.  
 b)  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\beta = 105^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 60^\circ}}$  a hajlásszög.  
 c)  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ \Rightarrow \gamma = 105^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 75^\circ}}$  a hajlásszög.  
 d)  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 20^\circ \Rightarrow \gamma = 70^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 70^\circ}}$  a hajlásszög.

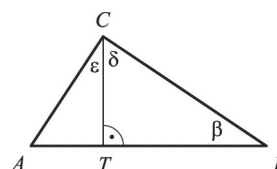
102.



103.



104.



100. a) Legyen a két szögfelező metszéspontja  $P$  és az  $ABP\Delta$   $P$ -nél lévő külső szöge  $\delta$ !

$$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{47^\circ 42'}{2} + \frac{73^\circ 10'}{2} = \underline{\underline{60^\circ 26'}};$$

b) Legyen a magasságok talppontja  $A_1$ , illetve  $B_1$ , metszéspontjuk  $M$ ! Az  $m_a$  és  $m_b$  magasságvonalak szöge a  $B_1MA_1C$  húrnégyszög  $M$ -nél levő külső szöge:  $\delta = \gamma = 180^\circ - 47^\circ 42' - 73^\circ 10' = \underline{\underline{59^\circ 8'}}$ .

101. Legyen az  $\alpha$  szögfelezőjének a  $BC$  oldallal vett metszéspontja  $P$ . Az  $APB\Delta$ -ben  $\delta$  a  $P$ -nél lévő külső szög.  $\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta = 97^\circ 1'$ . A hajlásszög  $180^\circ - \delta = 180^\circ - 97^\circ 1' = \underline{\underline{82^\circ 59'}}$ .

102. Az  $ABC\Delta$ -ben:  $\alpha = \beta = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ . a) Az  $ATB\Delta$  belső szögeinek összegéből:  $\delta = 90^\circ - \beta = \underline{\underline{15^\circ}}$  a szárhoz tartozó magasságvonal és az alap által bezárt szög.

b)  $\epsilon = \alpha - \delta = \underline{\underline{60^\circ}}$  a szárhoz tartozó magasságvonal és a másik szár által bezárt szög.

103. 1. eset: A szárszög hegyesszög. A 102. ábra jelöléseit használva:

A feladat feltételeiből  $\alpha = \beta$ ;  $\epsilon = \alpha - 13^\circ$ ; és  $\epsilon + \delta = \alpha \Rightarrow \delta = 13^\circ$ .

$ATB\Delta$ -ből  $\beta = 90^\circ - 13^\circ = 77^\circ \Rightarrow \alpha = 77^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 77^\circ = \underline{\underline{26^\circ}}$ .

2. eset: A szárszög tompaszög. A feladat feltételeiből  $\alpha = \beta$  és  $\epsilon = \alpha - 13^\circ$ ;  $ATB\Delta$ -ből  $\alpha + \epsilon + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \alpha - 13^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{34^\circ 20'}}$ ;  $\beta = \underline{\underline{34^\circ 20'}}$

$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 34^\circ 20' = \underline{\underline{111^\circ 20'}}$ .

104.  $BTC\Delta$ -ből  $\delta = 90^\circ - \beta = \underline{\underline{63^\circ}}$ ;  $ACB\angle = 90^\circ \Rightarrow \epsilon = 90^\circ - \delta = \underline{\underline{27^\circ}}$ .

105. Hegyesszögű, tompaszögű, valamint olyan derékszögű háromszög esetén, aminek  $a$  vagy  $b$  az átfogója, a vizsgált szögek merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Abban az esetben, ha  $a$  és  $b$  a derékszögű háromszög befogói:  $\sphericalangle(a; m_b) = \sphericalangle(b; m_a) = 0^\circ$ .

106. 1. eset: A háromszög befogói különbözők, így feltehető, hogy

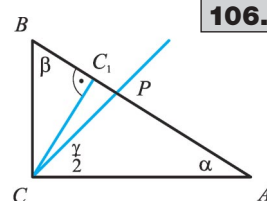
$\beta > \alpha \Rightarrow C_1 \in BP$ ;

$BC_1C\Delta$ -ből  $BCC_1\angle = 90^\circ - \beta$ . A szögfelezés miatt  $BCP\angle = 45^\circ$ .

$C_1CP\angle = 45^\circ - (90^\circ - \beta) = \underline{\underline{\beta - 45^\circ}}$ .

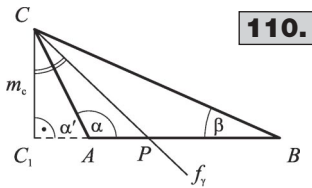
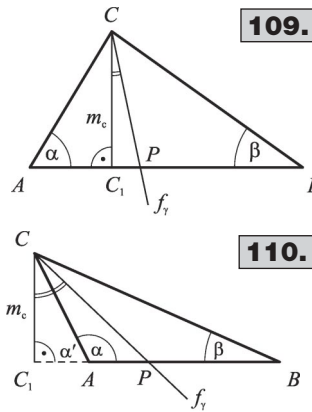
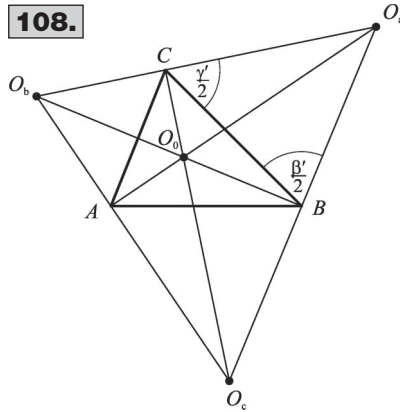
2. eset: A háromszög egyenlő szárú derékszögű  $\Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow P \equiv C_1 \Rightarrow C_1CP\angle = 0^\circ$ , amire teljesül, hogy  $45^\circ$ -kal kisebb, mint a  $45^\circ$ -os hegyesszögek.



106.

I



**107.** Legyen  $\alpha$  a külső szögfelezők metszéspontja,  $\varepsilon$  pedig az  $AQB\Delta$   $Q$ -nál lévő belső szöge.  $AQB\Delta$ -ben  $\varepsilon = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 90^\circ$  a külső szögfelezők hajlásszöge.

**108.**  $BCO_a\Delta$ -ben  $BCO_a\angle = \frac{\gamma'}{2}$  a 108. ábra jelölései szerint.

$$\underline{CBO_a\angle} = \frac{\beta'}{2} \Rightarrow \underline{CO_aB\angle} = 180^\circ - \frac{\gamma'}{2} - \frac{\beta'}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ - \alpha'}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \underline{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}.$$

Hasonlóan belátható, hogy  $\underline{CO_bA\angle} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  és  $\underline{AO_cB\angle} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ .

**109.** Legyen a 109. ábra jelölései szerint  $\alpha = 67^\circ$ ;  $\beta = 33^\circ \Rightarrow \gamma = 80^\circ$ ;  $\alpha > \beta$  miatt  $C_1 \in AP$ .

$$\underline{C_1CP\angle} = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \alpha) = \underline{17^\circ}.$$

**110. 1. eset:**  $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$ . A 109. ábra jelöléseit használva:  $\beta < \alpha \Rightarrow C_1 \in AP \Rightarrow C_1CP\angle = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

**2. eset:**  $\alpha = 90^\circ$ .  $A \equiv C_1$ ;  $C_1CP\angle = \frac{90^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

**3. eset:**  $\alpha > 90^\circ$  (110. ábra).  $C_1CP\angle = \frac{\gamma}{2} + 90^\circ - \alpha' = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} + \alpha - 90^\circ = \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

**111.** Legyen az  $\alpha$  szögfelezőjének metszéspontja a  $BC$  oldallal  $P$ !  $APB\angle$  külső szög az  $APC\Delta$ -ben  $\Rightarrow APB\angle = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ ;  $APC\angle$  külső szög az  $APB\Delta$ -ben  $\Rightarrow APC\angle = \frac{\alpha}{2} + \beta$ ;

$$|APB\angle - APC\angle| = \left| \frac{\alpha}{2} + \gamma - \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right| = \underline{|\gamma - \beta|}.$$

**112.** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $\gamma$  szárszögének felezője merőlegesen felezi az  $AB$  alapot  $F$ -ben. Ez azt jelenti, hogy a szárszög az  $AFC\angle = 90^\circ$ -kal egyenlő.  $\underline{\underline{\gamma = 90^\circ}}$ ;

$$\alpha = \beta = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \underline{45^\circ}.$$

**113.** Legyen az  $\alpha$  szögfelezőjének metszéspontja a  $BC$  szárral  $P$ ! Az  $ABC\triangle$  belső szögeinek összegéből:  $\alpha = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36^\circ \Rightarrow APB\angle = ABP\angle = 72^\circ \Rightarrow ABP\triangle$  egyenlő szárú.  
 $ACP\angle = \gamma = 36^\circ = \frac{\alpha}{2} = CAP\angle \Rightarrow APC\triangle$  egyenlő szárú.

**114.** Legyen az  $\alpha$  szögfelezőjének metszéspontja a  $BC$  szárral  $P$ !  $AP = AB \Rightarrow APB\angle = ABP\angle = \alpha$ . Az  $APB\triangle$  belső szögeinek összege:  $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 36^\circ}}$ . A háromszög szögei:  $72^\circ; 72^\circ; 36^\circ$ .

**115.** A színessel húzott szakaszok és az  $\alpha$  szögszárai által határolt egyenlő szárú háromszögekre többször alkalmazva a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó összefüggéseket:  $\underline{\underline{\beta = 75^\circ}}$ .

**116. a)** A töröttvonal egyes szakaszai az adott szög száraival rendre  $15^\circ$ -kal nagyobb szögeket zárnak be.  $15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ$  az egymást követő szögek nagysága. Ezeket követné a  $90^\circ$ , ami lezárja a sort, mert a következő háromszögnek már nem lehet 2 db  $90^\circ$ -os szöge.

b)  $n$  szakasz esetén  $\beta = (n - 1) \cdot \alpha$ . 10 egyenlő szakasz fér el, ha  $90^\circ > 9\alpha \Rightarrow \underline{\underline{10^\circ > \alpha}}$ .  $10^\circ$ -nál kisebbnek kell választani  $\alpha$ -t.

c)  $(n + 1)$  szakasz esetén  $\beta = n \cdot \alpha$ .  $(n + 1)$  egyenlő szakasz fér el, ha  $90^\circ > n \cdot \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\frac{90^\circ}{n} > \alpha}}$ .

**117.**  $ADC\triangle$  egyenlő szárú  $\Rightarrow ACD\angle = ADC\angle = 67,5^\circ$ .  $CEB\triangle$  egyenlő szárú  $\Rightarrow CEB\angle = ECB\angle = 67,5^\circ$ .  $ADC\angle = 67,5^\circ = CEB\angle \Rightarrow EDC\triangle$  egyenlő szárú, alapon fekvő szögei  $67,5^\circ$ -osak. Szárszöge  $ECD\angle = 180^\circ - 2 \cdot 67,5^\circ = 45^\circ$ .

**118.**  $ABD\triangle$  egyenlő szárú  $\Rightarrow ABC\angle = ADB\angle = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .  $CEB\triangle$  egyenlő szárú  $\Rightarrow CBE\angle = CEB\angle = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ .  $DEB\triangle$ -ben a belső szögek összege:  $DBE\angle + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 180^\circ \Rightarrow DBE\angle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$ .

**119. a) 1. eset:**  $AB = AC$ . Egyenlő szárú háromszögben a szárszög belső szögfelezője merőleges az alapra, külső szögfelezője pedig párhuzamos vele. Így nem jöhet létre az  $E$  pont, és az  $AD = AE$  állítás sem teljesülhet.

**2. eset:**  $AB > AC$ .  $AB > AC \Rightarrow B, D, C, E$  a pontok sorrendje.  $AD = AE$  és  $AD$  merőleges  $AE$  miatt az  $ADE\triangle$  egyenlő szárú derékszögű  $\Rightarrow ADE\angle = 45^\circ$ .  $ADE\angle$  külső szöge az  $ABD\triangle$ -nek  $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \beta = 45^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - (90^\circ - 2\beta) - \beta = 90^\circ + \beta}}$ .

**3. eset:**  $AB < AC$ .  $AB < AC \Rightarrow E, B, D, C$  a pontok sorrendje.  $AD = AE$  és  $AD$  merőleges  $AE$  miatt az  $ADE\triangle$  egyenlő szárú derékszögű  $\Rightarrow ADE\angle = 45^\circ$ .  $ADE\angle$  külső szöge az  $ACD\triangle$ -nek  $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \gamma = 45^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - (90^\circ - 2\gamma) - \gamma = 90^\circ + \gamma}}$ .

b)  $\gamma = 34^\circ$  esetén a  $\gamma = 90^\circ + \beta$  egyenlőség nem teljesülhet, így  $AB < AC$  összefüggés áll fenn az oldalak között  $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22^\circ}}$ ;  $\underline{\underline{\beta = 124^\circ}}$ .

**120.**  $AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .  $AD = AC$  és  $\alpha$  a  $\triangle DAC$  külső szöge  $\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$ .  $\angle BCD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ .

**121.**  $AB + AC > BC \Rightarrow B, F, E, C$  a pontok sorrendje.  $AB = BE \Rightarrow \angle BEA = \angle BAE = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ .  $AC = CF \Rightarrow \angle FAC = \angle AFC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ .  $\triangle ECA$   $E$ -nél fekvő külső szöge  $\angle FEA = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ . A külső szög tétel miatt  $\angle FEA = \angle ECA + \angle EAC \Rightarrow 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \gamma + \angle EAC \Rightarrow \angle EAC = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \Rightarrow \angle FAE = \angle FAC - \angle EAC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ .

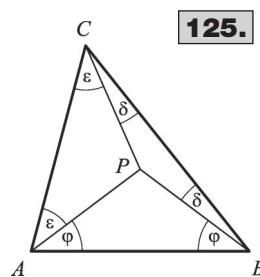
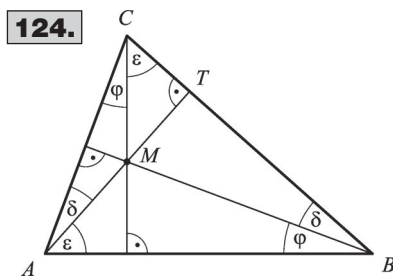
**122.** Legyen a szögfelező metszéspontja  $AB$ -vel  $P$ ; az  $A$ -ból húzott párhuzamos metszéspontja a  $BC$  egyenesel pedig  $Q$ !  $PC \parallel AQ \Rightarrow \angle BCP = \angle BQA = \frac{\gamma}{2}$ , mert egyállású szögek.  $PC \parallel AQ \Rightarrow \angle PCA = \angle CAQ = \frac{\gamma}{2}$ , mert váltószögek. Az állításokból  $\Rightarrow \triangle CAQ$  egyenlő szárú  $\Rightarrow CA = CQ$ .

**123.** Legyen a szögfelező metszéspontja  $AB$ -vel  $Q$ . A  $\triangle PAC$  egyenlő szárú, külső szöge  $\gamma \Rightarrow \angle PAC = \angle APC = \delta = \frac{\gamma}{2}$ . A szögfelezés miatt  $\angle BCQ = \frac{\gamma}{2}$ . Mivel  $Q$  és  $A$  a  $PB$  egyenes által határolt ugyanazon félsíkban található,  $\angle APC = \angle QCB$  egyállású szögek  $\Rightarrow AP \parallel QC$ .

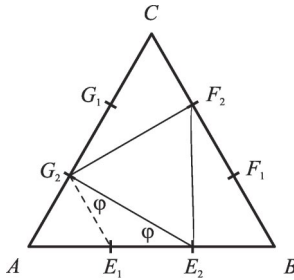
**124.** Az  $\triangle ABC$  belső szögeinek összege:  $2\delta + 2\varphi + 2\varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \delta + \varphi + \varepsilon = 90^\circ$ . Az  $\triangle ABT$  belső szögeinek összege:  $\delta + \varphi + \varepsilon + \angle ATB = 180^\circ \Rightarrow \angle ATB = 90^\circ \Rightarrow AT \perp CB \Rightarrow AT$  magasságvonal az  $\triangle ABC$ -ben. Hasonlóan belátható az állítás a többi szakaszra is.

**125.**  $AP = PB \Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 2\varphi$ .  $BP = PC \Rightarrow \angle BPC = 180^\circ - 2\delta$ .  $CP = PA \Rightarrow \angle CPA = 180^\circ - 2\varepsilon$ . Az  $\triangle ABC$  belső szögeinek összege:  $2\varphi + 2\delta + 2\varepsilon = 180^\circ$ . Felhasználva az  $\alpha = \varepsilon + \varphi$  egyenlőséget  $2\delta = 180^\circ - 2\alpha$  adódik.  $\angle BPC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ . Hasonlóan belátható, hogy  $\angle APB = 2\gamma$  és  $\angle CPA = 2\beta$ .

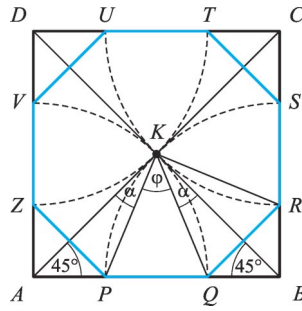
**126.** Legyen  $F$  az  $AB$  oldal felezéspontja és  $AB = 2CF$ !  $\triangle BCF$  és  $\triangle ACF$  egyenlő szárú  $\Rightarrow \angle CAF = \angle ACF = \delta$  és  $\angle FCB = \angle CBF = \varepsilon$ . Az  $\triangle ABC$  belső szögeinek összege:  $2\delta + 2\varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \delta + \varepsilon = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ .



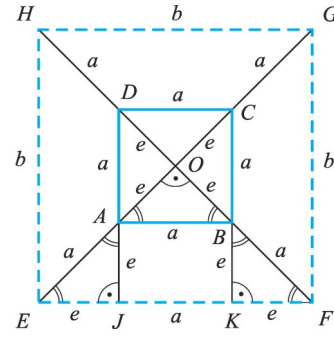
128.



129.



130.



127. Legyen az  $ABC\Delta$  alapja  $AB$ , a meghosszabbítással nyert pont  $C^*$ ! A háromszög egyenlő szárú  $\Rightarrow CAB\angle = CBA\angle = \alpha$ ;  $CB = CC^* \Rightarrow CC^*B\angle = CBC^*\angle = \varepsilon$ .  $ABC^*\Delta$ -ben

$$\alpha + (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \varepsilon = 90^\circ \Rightarrow ABC^*\angle = 90^\circ.$$

128. A harmadszakaszok egyenlősége miatt  $G_2A = AE_1$ ;  $ABC\Delta$  szabályos  $\Rightarrow G_2AE_1\angle = 60^\circ$ . A két megállapításból következik, hogy az  $AE_1G_2\Delta$  szabályos  $\Rightarrow G_2E_1 = E_1A = E_1E_2 \Rightarrow GE_1E_2\Delta$  egyenlő szárú, szárszögének külső szöge  $60^\circ \Rightarrow \varphi = 30^\circ \Rightarrow AG_2E_2\angle = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ . Az állítás a többi szögre is hasonlóan belátható.

129.  $KQ$  a  $45^\circ$ -os középponti szögű  $AC : 2$  sugarú  $AQK$  kör íve húrja.  $KP$  a  $45^\circ$ -os középponti szögű  $BD : 2 = AC : 2$  sugarú kör íve húrja.  $\Rightarrow KP = KQ$  (1). Hasonlóan:  $KP = KR = KS = \dots = KZ$ .  $AKQ\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow \alpha + 45^\circ = \alpha + \varphi \Rightarrow \varphi = 45^\circ$  (2);  $AKB\angle = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ : 2$  és  $QKR\angle = 2 \cdot \alpha = 45^\circ$  (3). Az (1), (2) és (3) állításokból következik, hogy a  $PQR\dots Z$  nyolcszög szabályos, mert  $K$  középpontú  $45^\circ$ -os forgásszimmetriája van.

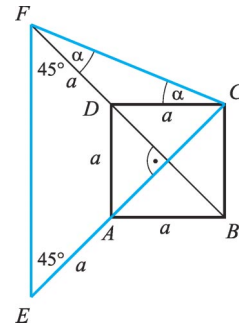
130. A meghosszabbítással egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek keletkeznek:  $ABO\Delta \cong FBK\Delta \cong EAJ\Delta \Rightarrow EF = EJ + JK + KF = a + 2e$  a keletkezett négyzet oldala.

131.  $FD = DC = a \Rightarrow FDC\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow DFC\angle = FCD\angle = \alpha$ ;  $EFC\Delta$ -ben  $EFC\angle = 45^\circ + \alpha$ ;  $FCE\angle = 45^\circ + \alpha \Rightarrow EFC\angle = FCE\angle \Rightarrow ECF\Delta$  egyenlő szárú.

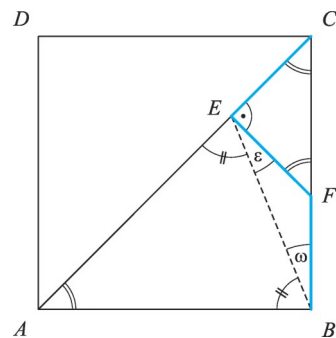
132. Az  $ABC\Delta$  egyenlő szárú derékszögű:  $CAB\angle = ECF\angle = 45^\circ \Rightarrow EFC\angle = 45^\circ \Rightarrow CE = EF$ ;

$$AB = AE \Rightarrow ABE\angle = AEB\angle = 67,5^\circ \Rightarrow \varepsilon = \omega = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ \Rightarrow EF = FB.$$

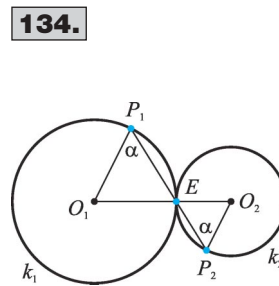
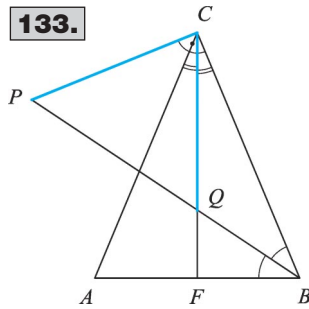
131.



132.



I



**133.**  $PCB\Delta$  derékszögű és  $PBC\angle = \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPB\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ .  $ABC\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow CF$

merőlegesen felezi  $AB$ -t  $\Rightarrow FBQ\Delta$  derékszögű  $\Rightarrow FQB\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ .  $PQC\angle$  és  $FQB\angle$  csúcs-  
szögek  $\Rightarrow PQC\angle = FQB\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ . Az állításokból  $CPQ\angle = PQC\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPQ\Delta$   
egyenlő szárú  $\Rightarrow \underline{CP = CQ}$ .

**134.**  $O_1P_1P_2\angle = O_2P_2P_1\angle = \alpha$ , mert váltószögek.  $O_1P_1E\angle = O_1EP_1\angle = \alpha$ , mert  $O_1P_1E\Delta$  egyenlő  
szárú.  $O_2P_2E\angle = O_2EP_2\angle = \alpha$ , mert  $O_2P_2E\Delta$  egyenlő szárú.  $O_1EP_1\angle = O_2EP_2\angle = \alpha$ .  
 $O_1, E, O_2$  egy egyenesen van és  $P_1, P_2$  az  $O_1O_2$  egyenes által határolt más-más félsíkokban van  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_1EP_1\angle$  és  $O_2EP_2\angle$  csúciszögek  $\Rightarrow$  másik száruk is egy egyenesen van  $\Rightarrow P_1, E, P_2$  egy egye-  
nesen vannak.

**135.**  $XAC\Delta$  egyenlő szárú, külső szöge  $CAB\angle = \alpha \Rightarrow CXA\angle = XCA\angle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2}}}$ .  $YBC\Delta$  egyenlő  
szárú, külső szöge  $ABC\angle = \beta \Rightarrow BYC\angle = YCB\angle = \underline{\underline{\frac{\beta}{2}}}$ .  $XCY\angle = XCA\angle + ACB\angle + BCY\angle =$   
 $= \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \underline{\underline{90^\circ + \frac{\gamma}{2}}}$ .

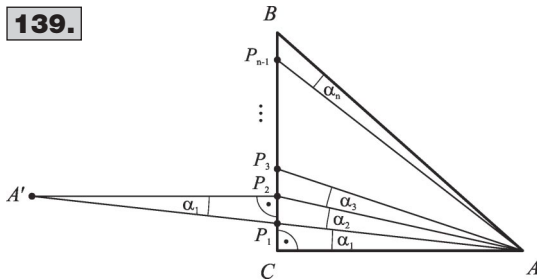
**136.**  $DOA\angle = OAB\angle = \frac{\alpha}{2}$ , mert váltószögek  $\Rightarrow DOA\Delta$  egyenlő szárú, mert két szöge  $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \underline{DA = DO}$ .  $EOB\angle = OBA\angle = \frac{\beta}{2}$ , mert váltószögek  $\Rightarrow EBO\Delta$  egyenlő szárú, mert két  
szöge  $\frac{\beta}{2} \Rightarrow \underline{EB = EO}$ . Az aláhúzott állításokból  $\Rightarrow DE = DO + OE = DA + EB$ .

### Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

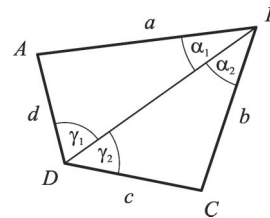
**137.** Legyen  $T$  a  $P$  külső pontból az  $e$  egyenesre állított merőleges talppontja! Legyen  $Q \neq T$   
az „ $e$ ” egyenes tetszőleges pontja! A  $PQT$  derékszögű háromszögben  $PQ$  átfogó,  $PT$  befogó.  
Mivel a legnagyobb szöggel szemben van a legnagyobb oldal, így  $PQ > PT$ . Tehát a lehetséges  
összekötő szakaszok közül  $PT$  a legrövidebb.

**138.** Az  $ABC\Delta$   $C$  derékszögű csúcsának vetülete az átfogóra  $T$ .  $ATC$  derékszögű háromszög-  
ben  $AC$  átfogó nagyobb, mint  $AT$  befogó:  $\underline{AC > AT}$ .  $BTC$  derékszögű háromszögben  $BC$  átfogó  
nagyobb, mint  $BT$  befogó:  $\underline{BC > BT}$ .

139.



143.



**139.** Tükrözzük az  $ACP_2\Delta$ -et a  $CP_2$  oldal  $P_1$  felezéspontjára!  $A$  képe  $A'$ ,  $C$  képe  $P_2$ ,  $P_2$  képe  $C$ ,  $CAP_1\angle$  képe  $P_1A'P_2\angle = \alpha_1$ ,  $CA = b$  képe  $P_2A' = b$ .  $P_2A$  átfogó az  $ACP_2\Delta$ -ben, ezért  $P_2A > b$ . Az  $A'AP_2\Delta$ -ben  $A'P_2 = b < P_2A$ , ezért a vele szemben levő  $\alpha_2$  szög is kisebb, mint a  $P_2A$ -val szemközti  $\alpha_1$  szög  $\Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$ . Ezt a gondolatmenetet a további szögekre is folytathatjuk, hiszen a kérdéses háromszögben a derékszög helyett tompaszöget találunk a legnagyobb szög helyén.

**140.** Legyen  $AP \leq PB$ , ahol  $P$  az  $AB$  alap tetszőleges pontja!  $\Rightarrow APC\angle \geq \angle BPC\angle \Rightarrow APC\Delta$ -ben az  $APC\angle$  a legnagyobb, így a vele szemben levő  $AC$  oldal a háromszög leghosszabb oldala:  $AC > CP$ .

**141.** Legyen  $P$  az  $AB$  oldal tetszőleges pontja! **1. eset:**  $CP$  merőleges  $AB$ -re  $\Rightarrow CP$  befogó az  $APC$ , illetve  $BPC$  derékszögű háromszögekben.  $AC$  és  $BC$  átfogók a fenti háromszögekben  $\Rightarrow AC > CP$  és  $BC > CP$ . **2. eset:**  $CP$  nem merőleges  $AB$ -re  $\Rightarrow CPA\angle$  és  $CPB\angle$  közül az egyik tompaszög  $\Rightarrow$  a megfelelő részháromszögben vele szemben  $CP$ -nél nagyobb oldal lesz.

**142.** Legyen  $\gamma_1 > \gamma_2$ ! Vegyünk fel  $A_2B_2C_2\Delta$ -gel egybevágó háromszöget úgy, hogy  $A_1C_1 \equiv A_2C_2$  legyen.  $\Rightarrow A_1C_1B^*\Delta$ ;  $\gamma_2 < \gamma_1$  miatt  $C_1B^*$  a  $\gamma_1$  szög belső tartományában halad.

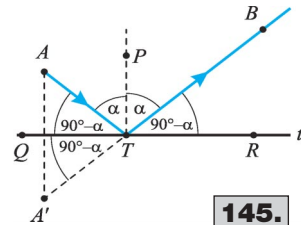
$C_1B^*B_1\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow C_1B^*B_1\angle = C_1B_1B^*\angle = \delta$ ;  $A_1B^*B_1\Delta$ -ben  $A_1B_1B^*\angle < \delta$ ,  $A_1B^*B_1\angle > \delta \Rightarrow A_1B^*B_1\angle$ -gel szemben nagyobb oldal van, mint  $A_1B_1B^*\angle$ -gel szemben  $\Rightarrow c_1 > c_2$ .

**143.**  $ABD\Delta$ -ben  $a > d \Rightarrow \gamma_1 > \alpha_1$ ;  $CBD\Delta$ -ben  $b > c \Rightarrow \gamma_2 > \alpha_2$ .  $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow ADC\angle > ABC\angle$ .

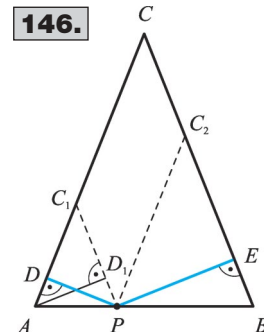
**144.** Legyen  $e(P; B) \cap AC = Q$ !  $APB\angle$  külső szög az  $APQ\Delta$ -ben  $\Rightarrow APB\angle = PAQ\angle + PQA\angle \Rightarrow APB\angle > PQA\angle$ .  $PQA\angle$  külső szög a  $BQC\Delta$ -ben  $\Rightarrow PQA\angle = QCB\angle + CBQ\angle \Rightarrow PQA\angle > QCB\angle$ . Az állításokból  $\Rightarrow \underline{APB\angle} > \underline{PQA\angle} > \underline{QCB\angle} = \underline{ACB\angle}$ .

**145.** A tükrözés törvénye szerint a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel:  $ATP\angle = BTP\angle = \alpha$ . Tükrözzük az  $A$  pontot a  $t$  egyenesre!  $A'B$  egyenese kijelöli a  $t$  egyenesnek azt a pontját, ami felé irányítani kell a fénysugarat.  $ATQ\angle = A'TQ\angle = 90^\circ - \alpha$  a tükrözés miatt.  $A'TQ\angle = BTR\angle = 90^\circ - \alpha$ , mert csúcshögek  $\Rightarrow BT$  valóban a visszavert fénysugár.

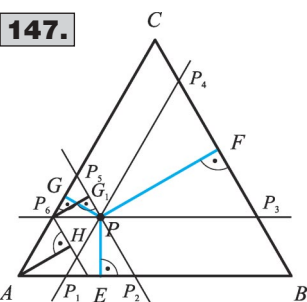
**146.** Húzzunk párhuzamost az alap  $P$  pontjából a háromszög száraival!  $\Rightarrow C_1, C_2$ .  $APC_1\Delta$  és  $BPC_2\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow PD$  az  $APC_1\Delta$  egyik szárához tartozó magassága, ami egyenlő a másik szárhoz tartozó magassággal  $\Rightarrow PD = AD_1$ .  $PE$  a  $PC_2B\Delta$  szárhoz tartozó magassága  $\Rightarrow PD + PE = AD_1 + PE$ , ami az  $ABC\Delta$   $BC$ -hez tartozó magasságával egyenlő, és ez  $P$ -től függetlenül állandó.



145.



146.



147.

**147.** Húzzunk párhuzamost a  $P$  ponton át a háromszög oldalaival!  $\Rightarrow P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  pontok;  $d(P; CB) = PF$ .  $P_6PP_5\Delta$  szabályos  $\Rightarrow d(P_6; P_2P_5) = P_6G_1 = PG$ .  $P_1P_2P\Delta$  egybevágó az  $AP_6$  oldalú szabályos háromszöggel  $\Rightarrow AH = PE$ .  $d(A; BC) = PE + PG + PF$ , ami az egyenlő oldalú háromszög magassága.

**148.** a)  $10 + 12 > 13 \Rightarrow$  Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek  $\Rightarrow$  létezik ilyen háromszög. b)  $1 + 2 = 3$  miatt nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek  $\Rightarrow$  nem létezik ilyen háromszög. c)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > \frac{3}{4}$ ; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek  $\Rightarrow$  létezik ilyen háromszög. d)  $1911 + 1918 =$

$= 3829 > 3826$ ; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek  $\Rightarrow$  létezik ilyen háromszög.

**149.** A háromszög-egyenlőtlenségek:  $0,7 + 1,8 > c \Rightarrow 2,5 > c$ ;  $0,7 + c > 1,8 \Rightarrow c > 1,1$ ;

A két feltételnek csak a 2 tesz eleget az egész számok közül  $\Rightarrow c = 2$  m.

**150.** 1. eset: A háromszög alapja 3 cm, szárjai 6 cm hosszúak. 2. eset: A háromszög alapja 6 cm, szárjai 3 cm hosszúak lennének, de ilyen háromszög nem létezik, mert  $3 + 3 = 6$  miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

**151.** 1. eset:  $a + \frac{b}{2} = 15$  cm;  $b + \frac{b}{2} = 6$  cm  $\Rightarrow b = 4$  cm,  $a = 13$  cm.

Ilyen háromszög nem létezik, mert  $4 + 4 < 13$  miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

2. eset:  $a + \frac{b}{2} = 6$  cm;  $b + \frac{b}{2} = 15$  cm  $\Rightarrow b = 10$  cm,  $a = 1$  cm;

$10 + 1 > 10$ ;  $10 + 10 > 1$ ;  $1 + 10 > 10$ . Ilyen háromszög létezik, alapja 1 cm, szárjai 10 cm hosszúak.

**152.** A feltételek szerint  $b \leq a$  és  $c \leq a \Rightarrow b + c \leq 2a \Rightarrow$  nem teljesülhet a háromszög-egyenlőtlenség a  $b, c, 2a$  oldalú háromszögre, tehát ilyen háromszög nem létezik.

**153.** A háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva:  $a + b > c \Rightarrow a + b + c > 2c \Rightarrow \frac{a + b + c}{2} > c \Rightarrow \underline{s} > c$ . Hasonlóan belátható, hogy  $\underline{s} > a$  és  $\underline{s} > b$ .

**154.** Legyen a belső pont  $P$  és  $AC \cap e(P; B) = Q$ .  $QCB\Delta$ -re alkalmazzuk a 141. feladat állítását  $\Rightarrow CP < CB$ .  $ABP\Delta$ -re a háromszög-egyenlőtlenség:  $AP + PB > AB$ . Az aláhúzott állításokból:  $AP + PB > AB = CB > CP \Rightarrow AP + PB > CP$ , és ezt akartuk belátni. Hasonlóan belátható, hogy  $AP + PC > PB$  és  $BP + PC > AP$ .

**155.** Legyen  $AB \cap e(C; P) = X$ . Háromszög-egyenlőtlenség a  $PXB\Delta$ -re:  $PB < PX + XB$ . Háromszög-egyenlőtlenség az  $AXC\Delta$ -re:  $CX = CP + PX < AX + AC$ . Adjuk össze a két egyenlőtlenséget:  $PB + CP + PX < PX + XB + AX + AC$ ;  $PB + PC < AX + XB + AC$ ;  $\underline{PB + PC < AB + AC}$ .

**156.** Háromszög-egyenlőtlenségek az  $ABC\Delta$  csúcsai és a  $P$  belső pont által alkotott rész-háromszögekre:  $AP + PB > AB$ ;  $PB + PC > BC$ ;  $PC + AP > AC$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:  $2 \cdot (AP + PB + PC) > AB + BC + AC \Rightarrow AP + PB + PC > \frac{AB + BC + AC}{2} = s$ , tehát a

belső pont csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb a fél kerületnél. Alkalmazzuk a 155. feladat állítását az  $ABC\Delta$   $P$  belső pontjára:  $PA + PB < CA + CB$ ;  $PB + PC < AB + AC$ ;  $PC + PA < BC + BA$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:  $2 \cdot (PA + PB + PC) < 2 \cdot (AB + BC + AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{PA + PB + PC < AB + BC + AC}$ , tehát a belső pont csúcsoktól mért távolságösszege kisebb a kerületnél.

**157. 1. eset:** Derékszögű háromszög olyan magassággal, ahol a  $T$  magasságtalppont azonos az  $A$  derékszögű csúccsal. Az egyik befogóhoz tartozó magasság  $m_c = b$ . Ebben a háromszögben  $m_c$  befogó,  $a$  átfogó, ezért  $m_c < a$ . Adjuk össze az összefüggéseket!  $2m_c < a + b \Rightarrow \underline{m_c < \frac{a + b}{2}}$ .

**2. eset:** Hegyesszögű háromszög, tompaszögű háromszög és olyan derékszögű háromszög, amelynél a magasságtalppont nem azonos a derékszögű csúccsal. Legyen  $T$  a  $C$  csúcsból induló magasság talppontja!  $BTC\Delta$ -ben  $m_c$  befogó,  $a$  átfogó  $\Rightarrow m_c < a$ ;  $ATC\Delta$ -ben  $m_c$  befogó,  $b$  átfogó  $\Rightarrow m_c < b$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!  $2m_c < a + b \Rightarrow \underline{m_c < \frac{a + b}{2}}$ .

**158.** A 157. feladat állítása szerint:  $m_a < \frac{b + c}{2}$ ;  $m_b < \frac{a + c}{2}$ ;  $m_c < \frac{a + b}{2}$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:  $\underline{m_a + m_b + m_c < \frac{b + c + a + c + a + b}{2} = a + b + c = K}$ .

**159.** Háromszög-egyenlőtlenség az  $ABD\Delta$ -re:  $AB < AD + DB$ . Háromszög-egyenlőtlenség a  $BDC\Delta$ -re:  $BC < DC + DB$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!  $AB + BC < AD + DC + 2DB \Rightarrow \underline{AB + BC < AC + 2BD \Rightarrow AB + BC - AC < 2BD}$ .

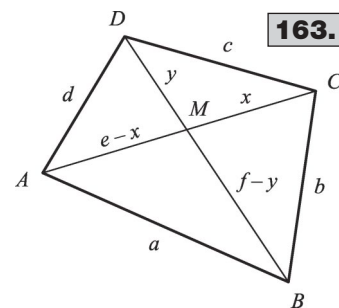
**160.** Tükrözzük az  $ABC\Delta$ -et az  $AB$  oldal  $C_1$  felezőpontjára!  $C$  képe  $C'$  lesz. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a  $CC'B\Delta$ -re:  $a + b > 2s_c$ . Hasonlóan megmutatható, hogy  $b + c > 2s_a$  és  $a + c > 2s_b$ . Adjuk össze a három egyenlőtlenséget:  $2a + 2b + 2c > 2s_c + 2s_a + 2s_b \Rightarrow \underline{a + b + c > s_c + s_a + s_b}$ .

**161.** Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a súlypont és a háromszög két-két csúcsa által meghatározott háromszögekre!  $ASB\Delta$ -re:  $\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$ ;  $BSC\Delta$ -re:  $\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$ ;  $CSA\Delta$ -re:  $\frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b$ . Adjuk össze a három egyenlőtlenséget:  $\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c > a + b + c \Rightarrow \underline{s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)}$ .

**162.** Az állítás helyett elég belátni, hogy  $CA_1 + A_1B > CA + AB$ . Legyen  $B$  tükörképe az  $AA_1$  külső szögfelezőre  $B^*$ ! A tükrözés miatt  $B^*A_1 = A_1B$  és  $B^*A = AB$ ;  $\underline{CA_1 + A_1B = CA_1 + A_1B^*} > CB^* = CA + AB^* = \underline{CA + AB}$ . Az aláhúzott részekből következik az állítás.

**163.** Jelöljük az átlók metszéspontjától a csúcsokig terjedő szakaszokat a 163. ábra szerint! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók által létrehozott háromszögekre!  $ABM\Delta$ -re:  $e - x + f - y > a$ ;  $CDM\Delta$ -re:  $x + y > c$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!

$e - x + f - y + x + y > a + c \Rightarrow e + f > a + c$ . Az állítás a másik szemköztés oldalpárra hasonlóan látható be.



**164.** A 163. ábra jelöléseivel: **1. eset:** Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók metszéspontja és a csúcsok által létrehozott háromszögekre!  $ABM\Delta$ -re:  $e - x + f - y > a$ ;  $BCM\Delta$ -re:  $f - y + x > b$ ;  $CDM\Delta$ -re:  $x + y > c$ ;  $DAM\Delta$ -re:  $y + e - x > d$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:  $2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow e + f > \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ .

**2. eset:** Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenségeket az átlók által létrehozott háromszögekre!  $ABC\Delta$ -re:  $a + b > e$ ;  $BCD\Delta$ -re:  $b + c > f$ ;  $CDA\Delta$ -re:  $c + d > e$ ;  $DAB\Delta$ -re:  $d + a > f$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:  $2a + 2b + 2c + 2d > 2e + 2f \Rightarrow a + b + c + d > e + f$ .

**165.** Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az  $ABC\Delta$ -re:  $AC + CB > AB$ . Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az  $ACD\Delta$ -re:  $AD + DC > AC$ . A kettőt együtt tekintve:  $AB < AC + CB < AD + DC + CB$ . Konvex négyszögeknél ez a gondolatmenet bármelyik oldalra megismételhető. Konkáv négyszög esetében (a konkáv szög  $\delta$ )  $CD < CA + AD$ , a befoglaló háromszögre  $CA < AB + BC$ , a kettőt együtt tekintve:  $CD < CA + AD < AB + BC + AD$ .

**166.** Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az  $ABC\Delta$ -re:  $AC < 6 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ . Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az  $ABD\Delta$ -re:  $BD < 6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm} < 9 \text{ cm}$ .

**167.** Legyen  $M$  az átlók metszéspontja és  $P$  egy tetszőleges pont az  $ABCD$  négyszög síkjában! Háromszög-egyenlőtlenség a  $DBP\Delta$ -re (egyenlőség  $P \in DB$  esetén):  $PD + PB \geq DB = DM + MB$ . Háromszög-egyenlőtlenség a  $ACP\Delta$ -re (egyenlőség  $P \in AC$  esetén):  $PC + PA \geq AC = AM + MC$ . Vegyük az egyenlőtlenségek összegét:  $PA + PB + PC + PD \geq MD + MB + MA + MC$ . Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $P \in DB$  és  $P \in AC$ , azaz  $P \equiv AC \cap DB = M$ . Tehát az átlók metszéspontjára a legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

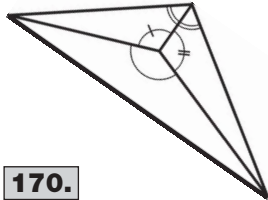
**168.** Háromszög-egyenlőtlenség az  $A_1A_2 \dots A_n$  sokszög szomszédos csúcsai és a tetszőleges  $P$  pont által meghatározott  $i$ -edik háromszögre:  $PA_i + PA_{i+1} > A_iA_{i+1}$ , ahol  $1 \leq i \leq n$  és  $A_{n+1} = A_1$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!  $\sum_{i=1}^n (PA_i + PA_{i+1}) > \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1} \Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^n PA_i > K \Rightarrow \sum_{i=1}^n PA_i > s$ .

**169. 1. eset:** A négy pont konvex négyszöget határoz meg. Három pont kiválasztásakor az összekötő szakaszaik között egy átló és két oldal van. Ha bármely kiválasztáskor csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a négyszögben minden szög hegyesszög lenne, így a belső szögek összege kisebb lenne  $360^\circ$ -nál, ami lehetetlen.

**2. eset:** A négy pont konkáv négyszöget határoz meg. Ha bármely kiválasztásnál csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a konkáv szög csúcsánál levő két szög összege kisebb lenne  $180^\circ$ -nál, ami lehetetlen.

**170.** A 170. ábrán jelzett szögek mindegyike tompaszög.

**171.**  $AF$  súlyvonal az  $APQ\Delta$ -ben. Legyen az  $A$  pont  $F$ -re vonatkozó tükörképe  $A'$ ! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az  $AA'P\Delta$ -re:  $AP + AQ = AP + PA' >$



$> 2AF \Rightarrow \frac{AP + AQ}{2} > AF$ . Hasonlóan megmutatható, hogy

$\frac{BP + BQ}{2} > BF$ . Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!  $\frac{AP + AQ + BP + BQ}{2} = \frac{(AP + PB) + (AQ + QB)}{2} = \frac{k + k}{2} = k$ .

**170.**

## Adott tulajdonságú pontok halmazának meghatározása a síkon

I

### Ponthalmazok

**172.** A keresett ponthalmazt az  $e$  egyenestől 3 cm távolságra húzódó párhuzamos egyenespár pontjai alkotják.

**173.** Az  $e$  egyenestől 3 cm-re levő párhuzamos egyenespár egy „sávot” jelöl ki a síkból. E „sáv” pontjai tartoznak a keresett ponthalmazba, a határpontok kivételével.

**174.** Az  $e$  egyenestől 3 cm-re húzódó párhuzamos egyenespár  $f$  és  $g$ . Az  $f$  és  $g$  egyenesek által létrehozott,  $e$ -t nem tartalmazó félsíkok pontjai tartoznak a ponthalmazba.

**175.** Az  $O$  középpontú, 3 cm sugarú kör és az egyenes közös pontja a megoldás. Nincs megoldás, ha  $d(O; e) > 3$  cm; Egy megoldás van, ha  $d(O; e) = 3$  cm; Két megoldás van, ha  $d(O; e) < 3$  cm.

**176.** A  $P$  pont mint középpont köré rajzolt 3 cm sugarú  $k$  kör és az  $e$  egyenestől 2 cm-re húzódó  $f$  és  $g$  párhuzamos egyenespár közös része adja a keresett ponthalmazt. 4; 3; 2; 1 vagy 0 megoldása lehet a feladatnak.

**177.** A keresett ponthalmazt a  $P$  középpontú, 3 cm sugarú  $k$  kör és az  $e$  egyenestől 2 cm-re húzódó  $f$  és  $g$  párhuzamosok által meghatározott sáv közös része alkotja. A megoldások száma függ a  $P$  pont és az  $e$  egyenes helyzetétől.

**178.** A keresett ponthalmazt a  $P$  középpontú, 3 cm sugarú  $k$  kör külső pontjainak és az  $e$  egyenestől 2 cm-re húzódó  $f$  és  $g$  párhuzamosok által meghatározott sáv belső pontjainak közös része alkotja. A megoldások száma függ a  $P$  pont és az  $e$  egyenes helyzetétől.

**179.** A keresett ponthalmazt az  $A$  középpontú, 4 cm sugarú  $k_A$  kör és a  $B$  középpontú, 2,5 cm sugarú  $k_B$  kör közös része alkotja.  $4 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm} < 8 \text{ cm} \Rightarrow k_A \cap k_B = \emptyset \Rightarrow$  nincs olyan pont, ami mindkét feltételnek megfelel.

**180.** A keresett pontok az  $A$  középpontú, 6 cm sugarú kör és a  $B$  középpontú, 6 cm sugarú kör közös pontjai. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet  $A$  és  $B$  távolságától függően.

**181.** A  $P$  középpontú, 2 cm sugarú kör és a  $Q$  középpontú, 3 cm sugarú kör közös része adja a keresett ponthalmazt. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet a  $P$  és  $Q$  távolságától függően.

**182.** A  $P$  középpontú, 2 cm sugarú körlap és a  $Q$  középpontú, 3 cm sugarú körlap közös belső pontjai adják a keresett ponthalmazt.

**183.** A  $P$  középpontú, 2 cm sugarú körlap és a  $Q$  középpontú, 3 cm sugarú kör külső pontjai által alkotott ponthalmaz közös része a keresett ponthalmaz.

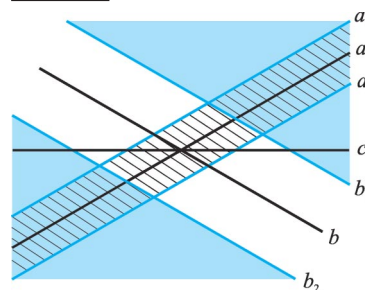
**184.** Az  $e$  egyenestől 1 cm távolságra húzódó  $e_1$  és  $e_2$  párhuzamos egyenespárnak az  $f$  egyenestől 1 cm-re húzódó  $f_1$  és  $f_2$  párhuzamos egyenespárral vett közös része adja a keresett ponthalmazt. Ha  $e$  nem párhuzamos  $f$ -fel, akkor 4 pont a megoldás. Ha  $e$  párhuzamos  $f$ -fel és  $d(e; f) = 2$  cm, akkor egy egyenes a megoldás. Ha  $e$  párhuzamos  $f$ -fel és  $d(e; f) \neq 2$  cm, akkor nincs megoldás.

**185.** A  $P$  középpontú, 3 cm belső sugarú, 4 cm külső sugarú körgyűrű belső pontjai és külső határvonala adják a keresett ponthalmazt.

**186.** A keresett ponthalmazt az ábrák mutatják az egyenesek elhelyezkedésétől függően. Első esetben üres halmazt, második esetben két pontot, harmadik esetben két szakaszt kapunk.

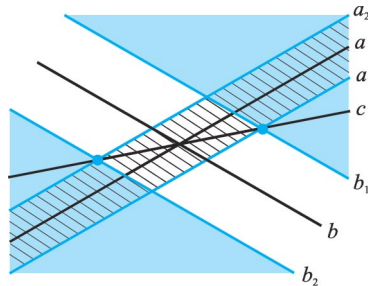
**187.** Az  $e$  egyenestől  $x$  távolságra levő  $e_1$  és  $e_2$  párhuzamos egyenespárnak az  $f$  egyenestől  $y$  távolságra levő  $f_1$  és  $f_2$  párhuzamos egyenespárral vett közös része a keresett ponthalmaz. Ha  $e \nparallel f$ , akkor 4 pont a megoldás.

186/I.

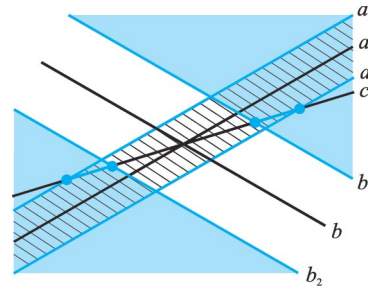


I

186/II.



186/III.



Ha  $e \parallel f$  és  $d(e; f) = x - y$  vagy  $d(e; f) = x + y$ , akkor egy egyenes a keresett ponthalmaz. Ha  $e \parallel f$  és  $d(e; f) \neq x - y$ ,  $d(e; f) \neq x + y$ , akkor a keresett ponthalmaz üres.

**188.** A ponthalmaz egy olyan 6 cm oldalú négyzet belső pontjaiból áll, melynek középpontja a merőlegeselek metszéspontja, oldalai pedig párhuzamosak a merőleges egyenesekkel.

**189.** Egyetlen ilyen pont van, a háromszög oldalfelező merőlegeseinek közös pontja.

**190.** a) Egyetlen ilyen pont van, a négyzet középpontja. b) A keresett ponthalmazt a 190. ábra mutatja.

**191.** A keresett ponthalmaz az  $e$  és  $f$  egyenesekkel párhuzamos  $k$  egyenes, amelyre  $d(f; k) = d(e; k)$ . A  $k$  egyenest az  $e$  és  $f$  egyenesek középpárhuzamosának nevezzük.

**192.** Az  $a$  és  $c$  oldalegyenesektől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a  $k_1$  középpárhuzamos, a  $b$  és  $d$  oldalegyenesektől pedig a  $k_2$  középpárhuzamos.  $k_1 \cap k_2 = O$ , a négyzet középpontja.

**193.**  $g_1, g_2, g_3, g_4 \parallel e \parallel f$ ,  $2 \cdot d(g_1; e) = d(g_1; f) \wedge 2 \cdot d(g_2; f) = d(g_2; e) \wedge 2 \cdot d(g_3; e) = d(g_3; f) \wedge 2 \cdot d(g_4; f) = d(g_4; e)$

**194.** A keresett ponthalmaz az  $e$  és  $f$  egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek pontjaiból áll.

**195.** Négy ilyen pont van, a három belső szögfelező, illetve egy belső és két külső szögfelező metszéspontja.

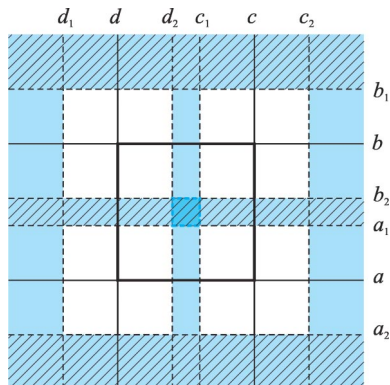
**196. 1. eset:** A három egyenesnek három különböző metszéspontja van:  $A, B$  és  $C$ . Négy ilyen pont van, a megfelelő szögfelezők metszéspontjaként kapjuk meg őket: ① A beírható kör középpontja,  $O_0$ ; ② A  $c$  oldalhoz hozzáírt kör középpontja,  $O_c$ ; ③ A  $b$  oldalhoz hozzáírt kör középpontja,  $O_b$ ; ④ Az  $a$  oldalhoz hozzáírt kör középpontja,  $O_a$ .

**2. eset:** A három egyenesnek egy közös pontja van:  $M$ .  $M$  az egyetlen pont, ami megfelel a feltételeknek.

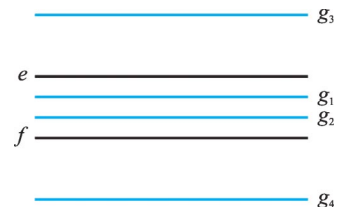
**3. eset:** Két egyenes párhuzamos, a harmadik metszi őket. Két ilyen pont van: ① Az  $A$ -nál keletkezett  $\alpha$  szög szögfelezőjének az  $e$  és  $f$  egyenesek  $g$  középpárhuzamosával való metszéspontja,  $Q$ ; ② Az  $A$ -nál keletkezett  $\alpha'$  szög szögfelezőjének a  $g$  egyenessel való metszéspontja,  $P$ . Megjegyzés: a  $B$ -nél keletkezett szögek felezésével is ugyanezekhez a pontokhoz jutottunk volna, mivel a  $BQAP$  négyszög téglalap.

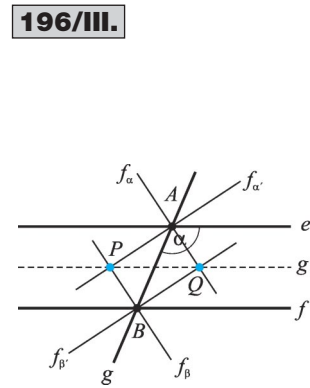
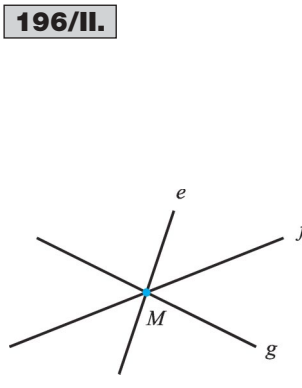
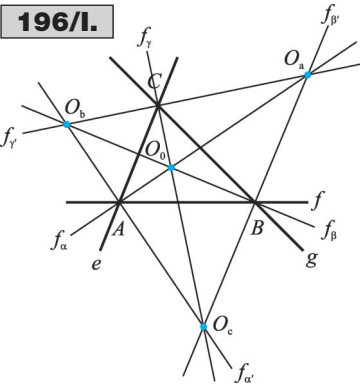
**4. eset:** Mindhárom egyenes párhuzamos. Nincs a feltételnek eleget tevő pont.

190.



193.





- 197.** A  $C$  pontok az  $AB$  egyenessel párhuzamosan, tőlük  $m$  távolságra levő  $c_1$  és  $c_2$  egyenesen vannak, és ezen egyenesek minden pontja megfelel a feltételnek.
- 198.** A feltételnek eleget tevő  $C$  pontok két olyan  $r$  sugarú kört alkotnak, amelyeknek a középpontja  $A$ -tól és  $B$ -től  $r$  távolságra van.  $A$  és  $B$  pont nem tartozik a keresett ponthalmazhoz, mert ebben az esetben nem jön létre háromszög.
- 199.**  $f_\alpha$  és  $f_\alpha'$  szögfelezők pontjai egyenlő távol vannak  $AB$  és  $AC$  egyenesétől.  $f_{AB}$  szakaszfelező merőleges pontjai egyenlő távol vannak az  $A$  és  $B$  pontoktól.  $f_\alpha \cap f_{AB} = M_1$ ,  $f_\alpha' \cap f_{AB} = M_2$ .  $M_1$  és  $M_2$  a keresett pontok.
- 200.** A keresett egyenesek a  $P$  középpontú, 4 cm sugarú kör  $e$ -vel párhuzamos érintői.
- 201.** Vegyünk fel  $e$  tetszőleges pontján át olyan  $f$  egyenest, ami  $e$ -vel  $(+\alpha)$  és olyan  $g$  egyenest, ami  $e$ -vel  $(-\alpha)$  szöget zár be! Szerkesszünk  $P$ -n át párhuzamost  $f$ -fel és  $g$ -vel!  $\Rightarrow f$  és  $g'$  a keresett egyenesek.
- 202.** A keresett egyenesek a  $P$  középpontú, 4 cm sugarú kör olyan érintői, amelyek az  $e$  egyenessel  $30^\circ$ -os szöget zárnak be. Négy ilyen egyenes van.
- 203.** A keresett pontok az adott félegyenessel közös kezdőpontú félegyenesen vannak. A két félegyenes  $45^\circ$ -os szöget zár be egymással. Ennek a félegyenesnek minden pontja megfelelő.
- 204.**  $OPQ\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow POQ\angle = PQQ\angle$ ;  $r \parallel q \Rightarrow ROQ\angle = OQP\angle$ , mert váltószögek.  $POQ\angle = PQQ\angle = ROQ\angle \Rightarrow OQ$  szögfelező. A szögfelező félegyenes minden pontja rendelkezik a tulajdonsággal.

